

# Модели на стационарни магнитни полета в анизотропни среди

В. Н. Савов, Т. Г. Тодоров, Ж. Д. Георгиев

**Abstract** -It has been worked out a mathematical model for numeric analysis of two-dimensional stationary magnetic fields in devices that contain anisotropic ferromagnetic media. It has been accepted that each ferromagnetic medium has two directions of anisotropy orthogonal to one another. The dependency between the medium's magnetic reluctance and the magnetic inductance across each one of these two directions has been stated analytically. The electromagnetic equations have been used. The method of finite elements has been applied.

## 1. Някои зависимости при анизотропните феромагнитни среди.

Повечето от използваните в практиката анизотропни феромагнитни среди имат две взаимно перпендикулярни посоки на анизотропия  $\tilde{p}$  и  $\tilde{q}$ . По всяка една от тях векторите на магнитната индукция  $\mathbf{B}$  и магнитния интензитет  $\mathbf{H}$  на полето са еднопосочни, а основните криви на намагнитването - различни.

Приема се, че изследваното електромагнитно устройство съдържа определен брой такива среди и че в общ случай посоките  $\tilde{p}$  (респективно  $\tilde{q}$ ) на тези среди са различни.

За всяка анизотропна среда в устройството се въвежда по една локална (декартова) координатна система с оси  $p = \tilde{p}$ ,  $q = \tilde{q}$  респ.  $z'$ , и единични вектори  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{q}_0$ , респ.  $\mathbf{z}_0$ .

Всички данни, които характеризират магнитните свойства на определена анизотропна среда се задават в нейната локална координатна система.

Всички операции свързани с изследването на устройството като цяло се извършват в друга - глобална координатна система с оси  $x$ ,  $y$ , респ.  $z$  и единични вектори  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , респ.  $\mathbf{k}$ , при което  $z' \equiv z$ .

При тази постановка: а) Всяка локална координатна система е завъртяна спрямо глобалната координатна система на ъгъл  $\theta$  ( $\theta = \angle x, p = \angle y, q$ ). Тензорът на завъртането има компоненти

$T_{11} = T_{22} = \cos \theta$ ,  $T_{12} = -T_{21} = \sin \theta$  и матрица  $[T]$  б) Тензорът на магнитния релуктивитет  $\tilde{\nu}$  в локалната координатна система има компоненти  $\nu_{11}^* = \nu_p$ ,  $\nu_{12}^* = \nu_{21}^* = 0$ ,  $\nu_{22}^* = \nu_q$  и матрица  $[\nu^*]$ , където  $\nu_p$  и  $\nu_q$  са магнитните релуктивитети на средата по посоките  $p$  и  $q$ .

в) Тензорът на магнитния релуктивитет  $\nu$  в глобалната координатна система има компоненти

$$\nu_{xx} = \nu_p \cos^2 \theta + \nu_q \sin^2 \theta,$$

$v_{xy} = v_{yx} = (\nu_p - \nu_q) \cos \theta \sin \theta$ ,  $\nu_{yy} = \nu_p \sin^2 \theta + \nu_q \cos^2 \theta$  и матрица  $[v] = [T]^{-1} [v^*] [T]$ .

Във всяка локална координатна система са валидни зависимостите  $\mathbf{B}^* = B_p \mathbf{p}_0 + B_q \mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{H}^* = H_p \mathbf{p}_0 + H_q \mathbf{q}_0$ ,  $H_p = \nu_p B_p$ ,  $H_q = \nu_q B_q$ ,  $\nu_p = \nu_p(B_p^2, B_q^2)$ ,  $\nu_q = \nu_q(B_p^2, B_q^2)$  и  $\mathbf{H}^* = \nu^* \mathbf{B}^*$ .

В глобалната координатна система са валидни зависимости  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j}$  и  $\mathbf{H} = \nu \mathbf{B}$ .

Приема се, че  $\nu_p$  и  $\nu_q$  са зададени аналитично. При изотропна среда с магнитен релуктивитет  $\nu$  •  $\nu_p = \nu_q = \nu_{xx} = \nu_{yy} = \nu$ ,  $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0$ .

По-нататък се използват и матриците:  $[F] = [T]^{-1} [F^*] [T]$  и

$$[F^*] = \begin{bmatrix} 2B_p^2 \frac{\partial \nu_p}{\partial B_p^2} & 2B_p B_q \frac{\partial \nu_p}{\partial B_q^2} \\ 2B_p B_q \frac{\partial \nu_q}{\partial B_p^2} & 2B_q^2 \frac{\partial \nu_q}{\partial B_q^2} \end{bmatrix}.$$

## 2. Основни уравнения. Вариационна постановка на анализа.

Приема се, че във всяка точка от вътрешността на изследваното устройство интензитетът  $\mathbf{H}$  и индукцията  $\mathbf{B}$  на магнитното поле удовлетворяват зависимостите  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ,  $\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J}$ , където  $\mathbf{J} = J \mathbf{k}$  ( $J = J_z = \text{const}$ ) и  $\mathbf{A} = A \mathbf{k}$  ( $A = A_z$ ) са съответно векторната плътност на електрическия ток и магнитния векторен потенциал на полето в същата точка.

Анализът на магнитното поле в разглежданото устройство се свежда до решаването на диференциалното уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nu_{yy} \frac{\partial A}{\partial x} - \nu_{yx} \frac{\partial A}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu_{xx} \frac{\partial A}{\partial y} - \nu_{xy} \frac{\partial A}{\partial x}) = -J, \quad (1)$$

от което се определя величината  $A = A(x, y)$ .

Приема се: а) величините  $\nu_{xx}$ ,  $\nu_{xy} = \nu_{yx}$  и  $\nu_{yy}$  са непрекъснати функции на мястото; б) областта ( $S$ ), в която се решава диференциалното уравнение (1), е ограничена от затворения контур ( $\Gamma$ ), чиято единична тангента  $t$  е ориентирана обратно на посоката на въртене на часовниковата стрелка; в)  $H_t = H \cdot t$ ; г) контурът ( $\Gamma$ ) се състои от три части ( $L_1$ ), ( $L_2$ ) и ( $L_3$ ), по протежение на които  $A|_{L_1} = g_1$ ,

$H_t|_{L_2} = 0$ ,  $H_t|_{L_3} = g_2$ , където  $g_1$  и  $g_2$  са предварително зададени функции на мястото.

При тази постановка величината  $A$ , която удовлетворява диференциалното уравнение (1) минимизира енергийния функционал

$$\mathfrak{I} = \iint_{(S)} \left[ \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} - \int_0^A J dA \right] dS + \int_{(L_3)} H_t A dl. \quad (2)$$

### 3. Прилагане на метода на крайните елементи.

Областта  $(S)$  се дискретизира на  $m$  крайни елемента  $(S_e)$  ( $e=1, 2, 3, \dots, m$ ), като се фиксираят  $p$  възела на интерполяция. Всеки елемент има  $r$  възела. Величините, които се отнасят до отделните елементи  $(S_e)$ , се означават с горен индекс  $e$ .

Върху всеки елемент  $(S_e)$  се извършва интерполяция на величината  $A$  по следния най-общ начин  $A^e = \sum_p \alpha_p^e(x, y) A_p = \{\alpha_p^e\}^T \{A^e\}$ , където  $\{\alpha^e\} = [\alpha_i^e \ \alpha_j^e \ \dots]^T$  и  $\{A^e\} = [A_i \ A_j \ \dots]^T$ , а  $p = i, j, \dots$  е номер на възел принадлежащ на елемент  $(S_e)$ .

Да приемем, че търсените стойности  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на величината  $A$  във възлите на областта  $(S)$ , са елементи на матрицата  $\{A\} = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n]^T$ .

Доказва се, че тези стойности могат да се определят от решаването на глобалната система уравнения

$$[\mathbf{S}]\{A\} = \{\mathbf{f}\}, \quad (3)$$

където  $[\mathbf{S}] = \sum_{l=1}^m [\mathbf{S}^e]$  и  $\{\mathbf{f}\} = \sum_{l=1}^m \{\mathbf{g}^e\} - \sum_{l=1}^m \{\bar{\mathbf{H}}^e\}$ .

Матрицата  $[\mathbf{S}_e]$  е с размерност  $(r \times r)$ . Нейните елементи имат вида  $S_{ij}^e = \int_{(S_e)} \{\bar{\mathbf{B}}_i^e\}^T [v] \{\bar{\mathbf{B}}_j^e\} dS$ .

Матриците  $\{\mathbf{g}^e\} = [g_i^e \ g_j^e \ \dots]^T$  и  $\{\bar{\mathbf{H}}^e\} = [H_i^e \ H_j^e \ \dots]^T$  в равенство (3) имат размерност  $(r \times 1)$ . Техните елементи имат вида  $g_i^e = \int_{(S_e)} J^e \alpha_i^e dS$  и  $H_i^e = \int_{(L_{3e})} H_t^e \alpha_i^e dl$ , където  $(L_{3e})$  е онази част от контура  $(L_3)$ , която принадлежи на елемента  $(S_e)$  (ако съществува такава).

### 4. Използване метода на Нютон - Рафсън.

За численото решаване на нелинейната система (3) се използва метода на Нютон - Рафсън. Съгласно този метод, решаването се свежда до организирането на итерационна процедура от вида

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}]^{N+1} \{\Delta \mathbf{A}\}^{N+1} &= -\{\mathbf{V}\}^{N+1}, \\ \{\mathbf{A}\}^{N+1} &= \{\mathbf{A}\}^N + \{\Delta \mathbf{A}\}^{N+1}, \end{aligned} \quad (4)$$

където  $[\mathbf{P}]^{N+1} = \sum_{l=1}^m [\mathbf{P}^e]^{N+1}$  и  $[\mathbf{V}]^{N+1} = \sum_{l=1}^m [\mathbf{V}^e]^{N+1}$ , а  $N$  е номерът на итерацията.

Матрицата  $[\mathbf{P}^e]^{N+1}$  в равенство (4) е с размерност  $(rxr)$ . Нейните елементи имат вида  $P_{ij}^{e,N+1} = S_{ij}^{e,N} + \int_{(S_e)} \{\bar{\mathbf{B}}_i^e\}^T [\mathbf{F}]^N \{\bar{\mathbf{B}}_j^e\} dS$ .

Матрицата  $[\mathbf{V}^e]^{N+1}$  в същото равенство е с размерност  $(rx1)$  и се определя от зависимостта  $[\mathbf{V}^e]^{N+1} = [\mathbf{S}^e]^N \{\mathbf{A}^e\}^N - \{\mathbf{g}^e\} + \{\bar{\mathbf{H}}^e\}$ .

Изчисленията при  $(N+1)$ -та итерация се извършват в следния ред:  
 а) Определят се компонентите на магнитната индукция  $B_x^N$  и  $B_y^N$  (в глобалната координатна система) във възловите точки на областта  $(S)$ , като се използват стойностите на величината  $A^N$  в същите точки, определени при  $N$ -тата итерация. б) Определят се компонентите на магнитната индукция  $B_p^N$  и  $B_q^N$  (в съответната локална координатна система) във възловите точки на областта  $(S)$ . в) Определят се елементите на матриците  $[\mathbf{v}]$  и  $[\mathbf{F}]$ . г) Определят се елементите на матриците  $[\mathbf{v}]$  и  $[\mathbf{F}]$ .

Итерационната процедура се прекратява, когато се изпълни

$$\frac{\left[ \{\Delta \mathbf{A}\}^N \right]^T \{\Delta \mathbf{A}\}^N}{\left[ \{\mathbf{A}\}^N \right]^T \{\mathbf{A}\}^N} < \varepsilon, \text{ където } \varepsilon \text{ е предварително зададено}$$

малко число.

## 5. Пример за прилагане на метода.

Използването на предложениия метод е илюстрирано със следния пример.

Безкрайно дълъг проводник с квадратно напречно сечение е разположен във феромагнитна среда с две взаимно перпендикулярни посоки на анизотропия  $\tilde{p}$  и  $\tilde{q}$ . По проводника протича постоянен ток с константна плътност  $J = 2 \cdot 10^6 A/m^2$ . Магнитното поле в пространството в и около проводника е стационарно и двумерно.

Приема се, че осите  $x$  и  $y$  на глобалната координатна система съвпадат с осите  $p$  и  $q$  на локалната ( $\theta = 0$ ), а напречното сечение на проводника ( $S_a$ ) е разположено в равнината  $Oxy$  и представлява квадрат със страна  $a = 2 \cdot 10^{-2} m$ .

Магнитните релуктивитети  $\nu_x$  и  $\nu_y$  на средата в двете посоки на

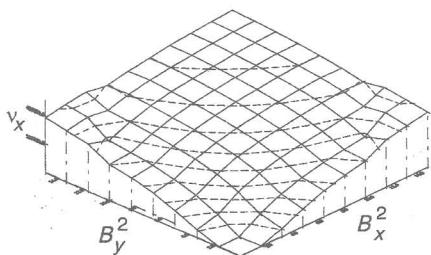
анизотропия, се определят посредством зависимостите

$$\nu_x = [40 + f(B_x^2, B_y^2)], \quad \nu_y = [260 + f(B_x^2, B_y^2) + g(B_x^2)] \quad (5)$$

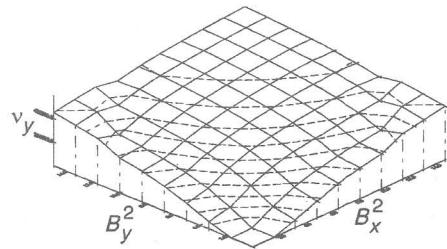
$$f(B_x^2, B_y^2) = \begin{cases} 0.004 \exp[3.5(B_x^2 + 1.1B_y^2)], & \text{при } (B_x^2 + 1.1B_y^2) \leq 4.467 \\ \frac{1}{4\pi 10^{-7}} \left(1 - \frac{2.048}{\sqrt{B_x^2 + 1.1B_y^2}}\right), & \text{при } (B_x^2 + 1.1B_y^2) > 4.467 \end{cases}, \quad (5a)$$

$$g(B_x^2, B_y^2) = \begin{cases} 3 \exp(2B_y^2), & \text{при } B_y^2 \leq 3.61 \\ 63296(1 - \frac{1.777}{\sqrt{B_y^2}}), & \text{при } B_y^2 > 3.61 \end{cases}. \quad (5b)$$

Релефите на функциите (5) са показани на фиг. 1 и фиг. 2

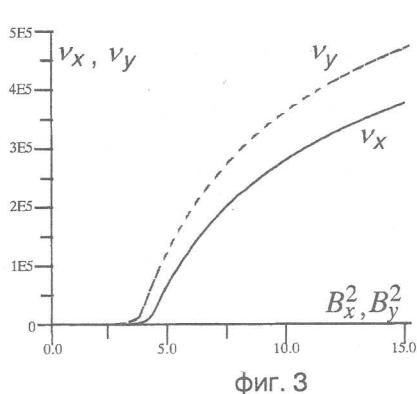


фиг. 1

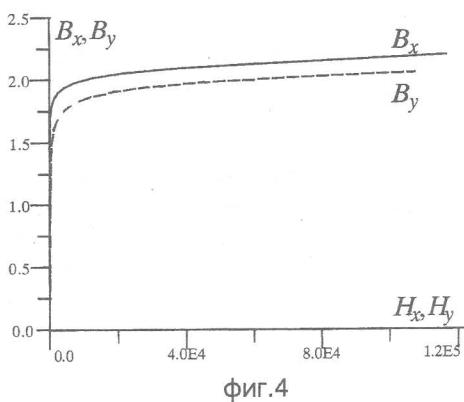


фиг. 2

На фиг. 3 са показани зависимости  $\nu_x = \nu_x(B_x^2)$ ,  $\nu_y = \nu_y(B_y^2)$ , а на фиг. 4 - основните криви на намагнитване (графиките на функциите  $B_x = B_x(H_x)$  и  $B_y = B_y(H_y)$ ), на феромагнитната среда в посоките  $\vec{p} \equiv x$  и  $\vec{q} \equiv y$ .

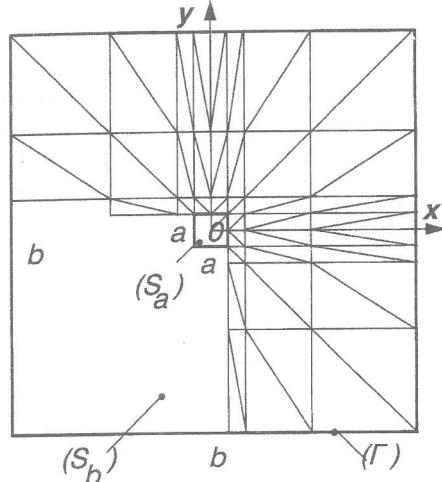


фиг. 3



фиг. 4

Магнитният векторен потенциал се определя в онази част ( $S_b$ ) от равнината  $Oxy$ , която е ограничена от квадратния контур ( $\Gamma$ ) със страна  $b=24 \cdot 10^{-2} m$ .



фиг.5

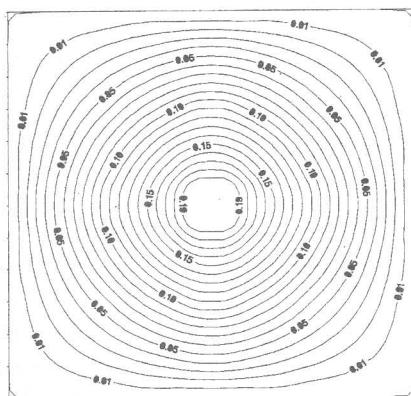
По протежението на този контур е зададено граничното условие  $A|_{\Gamma}=0$ .

На фиг.5 е показана дискретизацията на областта ( $S_b$ ). На фиг. 6 и фиг. 7 са показани изолиниите на магнитния векторен потенциал  $A$  в областта ( $S_b$ ) при изчистването на който са използвани съответно:

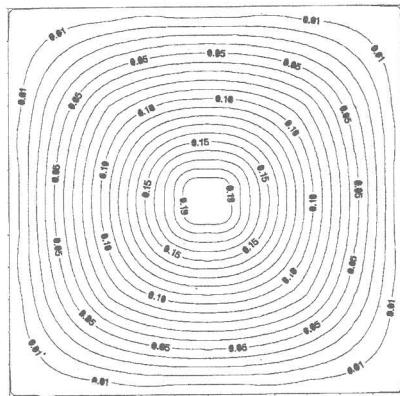
а) основните криви на намагнитване от фиг. 4,

б) зависимостите (5).

Стойностите на величината  $A$  са получени в  $Tm$ .



фиг. 6



фиг. 7

### Литература:

- Сильвестер П., Р.Ферари, „ Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров электриков “, Москва, Мир, 1986
- Кулон Ж. Л., Ж. К. Сабондъер, „ САПР в электротехнике “, Москва, Мир, 1988
- Маергоиз И.Д., „ Итерационные методы расчета статических полей в неоднородных анизотропных и нелинейных полях “, Киев, Наука, 1979