Гранични цикли в нелинейни електрически вериги

В. Н. Савов, Т. Г. Тодоров, Ж. Д. Георгиев

Abstract - The basis of theoty that enables the establishment and localization of limit cycles by perturbed Hamiltonian (close to Hamiltonian) systems of differential equations has been outlined.

By the work of generators of self-sustained sinusoidal oscilations, whose volt-amper characteristic has a part with negative resistance, limit cycles have been localized.

1. Гранични цикли в смутени хамилтонови системи.

Нека е дадена хамилтоновата система

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = -H_y \\ \dot{y} = H_x \end{array} \right. , \qquad (1)$$

където $x = x(\tau)$ и $y = y(\tau)$ са реални функции на реалната променлива τ , а $\dot{(\ )} \equiv \frac{d}{d\tau}$. Хамилтонианът $H(x,y)$ на системата (1) представлява реална функция на x и y, която е аналитична в $\boldsymbol{R}^2$ $(H_x = \frac{\partial H}{\partial x}, H_y = \frac{\partial H}{\partial y})$.

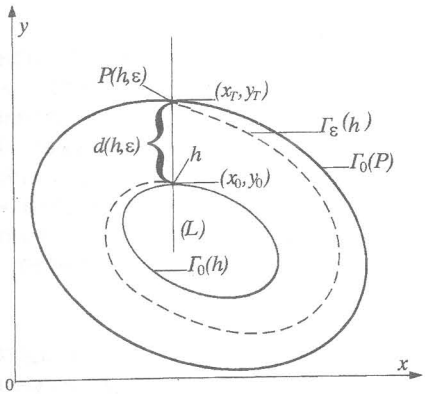
Ако към уравненията на система (1) се добавят величините $\varepsilon f(x,y,\varepsilon)$ и $\varepsilon g(x,y,\varepsilon)$ се получава смутената хамилтонова система

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = -H_y + \varepsilon f(x,y,\varepsilon) \\ \dot{y} = H_x + \varepsilon g(x,y,\varepsilon) \end{array} \right. , \qquad (2)$$

където ε $(|\varepsilon| \langle\langle 1)$ е малък параметър, а функциите $f(x,y,\varepsilon)$ и $g(x,y,\varepsilon)$ са реални и аналитични в $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}$.

Да приемем, че в определена област на равнината Oxy (около особена точка тип „център") системата (1) има непрекъсната еднопараметрична фамилия затворени фазови траектории (фиг. 1) $\{\Gamma_0(h)\}_{h\in\Omega}$ с уравнения $\Gamma_0(h): H(x,y) = h$, където h е параметър , а Ω - отворено множество от стойности на h, за които тези траектории не се израждат в точка („център"), или сепаратриса .

Нека кривата (L) е сечение на Поанкаре, разположено нормално спрямо фамилията $\{\Gamma_0(h)\}_{h\in\Omega}$ и параметризирано относно h, нека $\Gamma_\varepsilon(h)$ е онази фазова траектория на смутената система (2), чиято



фиг. 1

начална точка (x_0, y_0) лежи върху (L) и нека $T = T(h, \varepsilon)$ е онази стойност на τ за която траекторията $\Gamma_\varepsilon(h)$ пресича за пръв път (L) в точка $(x_T, y_T) \in (L)$, която има параметър $P(h, \varepsilon)$. При тази постановка релацията $h \to P(h, \varepsilon)$ дефинира изображението на Поанкаре за системата (2), а $P(h, \varepsilon)$ представлява функцията на Поанкаре.

Функцията на изместването $d(h, \varepsilon)$ удовлетворява зависимостта

$$d(h, \varepsilon) = P(h, \varepsilon) - h = M(h)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{3}$$

където $O(\varepsilon^2)$ представлява величина, за която израза $\dfrac{O(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}$ е ограничен при $\varepsilon \to 0$.

Коефициентът $M(h)$ пред ε в равенство (3) се нарича функция (интеграл) на Мелников . Тя има вида

$$M(h) = \oint_{\Gamma_0(h)} [f(x, y, 0)dy - g(x, y, 0)dx], \tag{4}$$

а производната и се определя от израза

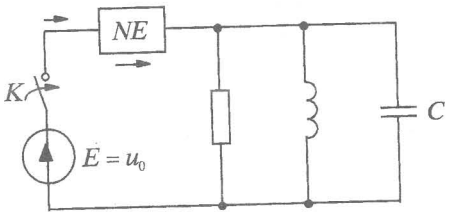
$$M'(h) = \frac{dM(h)}{dh} = \oint_{\Gamma_0(h)} \left[\frac{f_x(x, y, 0)}{H_x} dy - \frac{g_y(x, y, 0)}{H_y} dx \right], \tag{5}$$

където $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $g_y = \dfrac{\partial g}{\partial y}$.

Изложеното по-горе дава възможност да се формулира следната **бифуркационна Теорема**: Нека $\{\Gamma_0(h)\}_{h \in \Omega}$ представлява еднопараметричната фамилия затворени фазови траектории на системата диференциални уравнения (1), а $\Gamma_0(h_0)$ $(h_0 \in \Omega)$ е затворена фазова траектория, за която $M(h_0) = 0$ и $M'(h_0) \neq 0$.

Тогава: а) За достатъчно малко $\varepsilon \neq 0$ смутената хамилтонова система (2) има хиперболичен граничен цикъл Γ_ε в околността на $\Gamma_0(h_0)$, който клони към $\Gamma_0(h_0)$ при $\varepsilon \to 0$; б) Ако $\varepsilon M'(h_0) \langle 0$ граничният цикъл е устойчив (привличащ), а ако $\varepsilon M'(h_0) \rangle 0$ граничният цикъл Γ_ε е неустойчив (отблъскващ).

2. Изследване на генератор на синусоидални колебания.



фиг. 2

На фиг. 2 е показана схемата на генератор на синусоидални колебания, съдържащ нелинеен елемент NE в характеристиката на който има участък с отрицателно съпротивление. Токът, който протича през този елемент е $i = i_0 + \tilde{i}$, а напрежението между изводите му - $u = u_0 + \tilde{u}$, където i_0 и $u_0 = E$ са постоянните, а $\tilde{i} = \tilde{i}(t)$ и $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$ - променливите компоненти на i и u.

Характеристиката на нелинейния елемент може да се апроксимира най-общо по следния начин

$$i = \Phi(u) = i_0 + a_1(u_0 - u) + a_3(u_0 - u)^3 - a_5(u_0 - u)^5, \tag{6}$$

или

$$\tilde{i} = \tilde{\Phi}(\tilde{u}) = -a_1\tilde{u} - a_3\tilde{u}^3 + a_5\tilde{u}^5, \tag{7}$$

където $a_1 \rangle 0$; $a_3 \langle 0$ или $a_3 \rangle 0$ и $a_5 \geq 0$.

Може да се покаже, че при функционирането на генератора променливата компонента на напрежението u удовлетворява зависимостта

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega_0 C}\left[G + \frac{d\tilde{\Phi}(\tilde{u})}{d\tilde{u}}\right]\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + \tilde{u} = 0, \tag{8}$$

където $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\tilde{u} = \tilde{u}(\tau)$, а величината $\tau = \omega_0 t$ е пропорционална на времето t.

В зависимост от коефициентите на апроксимиращия полином ще разгледаме следните случаи:

<u>1) случай</u>: $a_3 \langle 0$, $a_5 = 0$.

<u>а) подслучай</u>: $a_1 - G \rangle 0$.

При $a_3 = -|a_3|$, $x = \sqrt{\frac{3|a_3|}{a_1 - G}}\tilde{u}$ и $\varepsilon = \frac{a_1 - G}{\omega_0 C} \rangle 0$ уравнението (8) се трансформира в уравнение на Ван дер Пол

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{d\tau} + x = 0, \tag{9}$$

което може да се запише в следния автономен вид

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = -y + \varepsilon\left(x - \dfrac{x^3}{3}\right) \\ \dot{y} = x \end{array} \right. , \tag{10}$$

От равенства (2) и (10) се вижда , че $f = x - \dfrac{x^3}{3}$ и $g = 0$.

При $\varepsilon = 0$ от равенство (10) за несмутената система се получава

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{array} \right. . \tag{11}$$

Тя има хамилтониан

$$H(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = h \tag{12}$$

и фазови траектории с уравнения

$$\Gamma_0(h): x^2 + y^2 = r^2 = 2h, \tag{13}$$

които представляват окръжности с център $(x,y) = (0,0)$ и радиус $r = \sqrt{2h}$.

При тази постановка функцията на Мелников и нейната производна придобиват вида

$$M(h) = \oint_{\Gamma_0(h)} \left(x - \frac{x^3}{3}\right) dy, \qquad M'(h) = \oint_{\Gamma_0(h)} \frac{1-x^2}{x} dy. \tag{14}$$

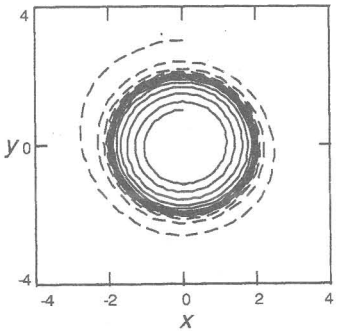
След въвеждането на полярните координати $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $(dy = r\cos\varphi\, d\varphi)$ равенствата (14) приемат вида

$$M(h) = \int_0^{2\pi} \left(r\cos\varphi - \frac{1}{3}r^3\cos^3\varphi\right) r\cos\varphi\, d\varphi = \pi h\left(r^2 - \frac{r^4}{4}\right) = \pi h(2-h), \tag{15}$$

$$M'(h) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2\cos^2\varphi}{r\cos\varphi} r\cos\varphi\, d\varphi = \pi\left(2 - r^2\right) = 2\pi(1-h). \tag{16}$$

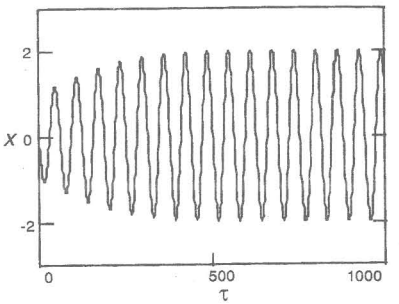
Уравнението $M(h) = 0$ има единствен корен $h_0 = 2$, при който $\varepsilon M'(h_0) = \varepsilon 2\pi(1-2) = -2\pi\varepsilon \langle 0$. Следователно системата (10) има един устойчив граничен цикъл, който е окръжност с радиус $r = \sqrt{2h_0} = 2$.

На фиг. 3 е показан фазовият портрет на система (10), а на фиг. 4 - решението на уравнението (9) в областта на променливата τ при $\varepsilon = 0{,}1$ и начално условие $(x_0, y_0) = (0,1)$.



——при начално условие (0,1)
- - - -при начално условие (0,3)

фиг. 3



фиг. 4

б) подслучай: при $a_1 - G \langle 0$.

В този подслучай интегралът на Мелников не се анулира при $h \rangle 0$. Следователно уравнението (8) няма гранични цикли.

2) случай: $a_3 \rangle 0, a_5 \rangle 0$.

а) подслучай: $a_1 - G \langle 0$.

При $x = \sqrt{\dfrac{3a_3}{G - a_1}}\,\tilde{u}$, $\varepsilon = \dfrac{a_1 - G}{\omega_0 C} \langle 0$ и $\gamma = \dfrac{5a_5(G - a_1)}{9a_3^2} \rangle 0$

уравнението (8) приема вида

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \varepsilon(1 - x^2 + \gamma x^4)\frac{dx}{d\tau} + x = 0, \tag{17}$$

респективно:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = -y + \varepsilon\left(x - \dfrac{x^3}{3} + \gamma\dfrac{x^5}{5}\right) \\ \dot{y} = x \end{array} \right. , \tag{18}$$

при което $f = x - \dfrac{x^3}{3} + \gamma\dfrac{x^5}{5}$ и $g = 0$.

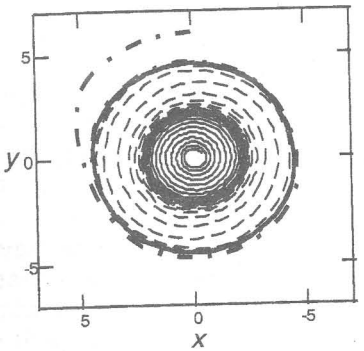
В този подслучай функцията на Мелников и нейната производна приемат вида

$$M(h) = \pi h(2 - h + \gamma h^2), \qquad M'(h) = \pi(2 - 2h + 3\gamma h^2). \tag{19}$$

Уравнението $M(h_0) = 0$ има два корена

$$h_{0_{1,2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\gamma}}{2\gamma}, \qquad h_{0_1} \rangle h_{0_2}, \tag{20}$$

които са реалнии положителни, когато $0 \langle \gamma \langle \frac{1}{8}$.



—— при начално условие (0,2.23)
····· при начално условие (0,2.24)
-·-·- при начално условие (0,6)

фиг. 5

При тези условия

$$\varepsilon M'(h) = \varepsilon \pi (h_0 - 4) \begin{cases} \langle 0 & при \quad h_0 \rangle 4 \\ \rangle 0 & при \quad h_0 \langle 4 \end{cases}.$$

Следователно системата (18) има два гранични цикъла. Единият от тях е устойчив и представлява окръжност с радиус $r_1 = \sqrt{2h_{0_1}}$, а другият - неустойчив и представлява окръжност с радиус $r_2 = \sqrt{2h_{0_2}}$.

На фиг. 5 е показан фазовият портрет на системата (18) при $\varepsilon = -0{,}1$ и $\gamma = 0{,}08$.

б) подслучай: $a_1 - G \rangle 0$.

В този подслучай уравнението (8) има един неустойчив граничен цикъл, който представлява окръжност с радиус $r = \sqrt{2h_0}$.

3) случай: $a_3 \langle 0, a_5 \rangle 0$.

а) подслучай: $a_1 - G \rangle 0$.

Уравнението (8) има един граничен цикъл , който представлява окръжност с радиус $r = \sqrt{2h_0}$. Той е устойчив ако $h_0 \langle 4$ и неустойчив ако $h_0 \rangle 4$.

б) под случай: $a_1 - G \langle 0$.

В този подслучай уравнението (8) няма граничени цикли.

Литература:

1. Horozow E., I. D. Iliev. On Saddle - Loop Bifurcations of in Perturbations Limit Cycles of Quadratic Hamiltonian Systems., Journal of Differential Equations, vol. 113, 1 , pp.84-105,1994.
2. Blows T. R., L. M. Perko. Bifurcations of Limit Cycles from Centers and Sepatrix Cycles „SIAM Review“, vol. 36, 3, pp. 341-376, 1994.
3. Chicone C. On Bifurcations of Limit Cycles from Centers,„Lecture Note in Mathematics 1455 “, Springer Verlag, New York, pp 22-43, 1991.