

# СМАЛУВАЊЕ НА КОЕФИЦИЕНТИТЕ НА ФРАКЦИОНИОТ КОРЕКТОР СО ДОПОЛНИТЕЛЕН FIR ФИЛТЕР

Љубомир Г. Стрезов  
Бул. Пародри бр 9/ст.8, 9100-Скопје, Македонија

Ljubomir G. Strezov: Tap-dimunishing of Fractionally Spaced Equalizer with Additional FIR Filter

**Abstract.** The use of fractionally-spaced equalizers (FSE), implemented as a tapped-delay line with uniformly spaced taps with spacing  $\Delta$  equal to the fraction of the symbol period  $T$ , increase the tolerance of the receiver to channel imperfections in comparison to the synchronous ones (with  $\Delta=T$ ), their major drawback being the instability in case of increased signal-to-noise ratio. In order to overcome this problem in this paper it is proposed in the receiver to implement a second FIR filter. The coefficients of this filter shall simplify the calculation of the autocorelation matrix of the virtual noise and not degrade mean-square error at the equalizer's output. The filter design criterion is the minimization of the energy concentration in a given frequency band.

## 1. Вовед

Добро е познато дека фракционите коректори, со растојание меѓу изводите  $\Delta < T$ , каде  $\epsilon$  Т трењето на еден симболен интервал, даваат многу подобри резултати при корекција на несодветната амплитудна и фазна карактеристика на каналот за пренос. Но нивна исто така добро позната мана е при голем однос сигнал/шум во каналот во множеството на кофициенти на коректорите да се најдат и такви кои имаат релативно големи вредности. Макар да е средната квадратна грешка (MSE) задоволителна, некои од овие кофициенти ќе бидат толку големи што ќе предизвикаат заситување на регистрите при формирање на парцијалните заборови преку кои се добива сигналот на излез од коректорот.

За решение на наведениот проблем постојат повеќе можности. Првата е на кофициентите да им се дозволи адаптација само во една одредена област. Кога тие се приближат кон дозволените граници тогаш се заситуваат на максимална вредност. Втора можност е на приемниот сигнал да му се додаде мала количина на бел шум со цел да се зголемат најмалите својствени вредности во коваријансната матрица [1-4]. Цената која се плаќа е деградација во MSE бидејќи компоненти на шумот се јавуваат и на влезот во склопот за одлучување. Постои и трета можност вештачки да се додаде шум кој нема заеднички спектрални компоненти со приемниот сигнал. Во принцип ваквото решение не ја деградира резултантната MSE, но негова мана е релативно голема сложеност на пресметка на алгоритмот во однос на вообичаените решенија [4].

И другата и третата споменета можност припаѓаат на групата решенија со виртуален шум (Virtual Noise). Познатиот алгоритам за ублажување на кофициентите на филтерот (Tap-leakage) [2] припаѓа исто така на оваа група и е предмет на понатамошно интересирање на голем број истражувачи.

Во овој труд претставено е едно решение кое се базира на имплементација на еден дополнителен FIR филтер во приемникот. Овај филтер е проектиран така да додадениот, виртуален шум не внесува деградација во средната квадратна грешка. Од втора страна тој е доволно едноставен така да значително не ја усложнува пресметката. На крајот претставени се резултатите што се добиени кај FSE кога се користи алгоритмот за ублажување на кофициентите на филтерот со дополнителен FIR филтер, а кој е применет за корекција на селективниот фединг што се јавува кај дигиталните радио системи.

## 2. Адаптивен алгоритам со виртуален шум

Са цел да се објасни адаптивниот алгоритам за нагодување на коефициентите на фракциониот коректор со помош на виртуален шум, се претпоставува дека сигналот на влезот во филтерот  $z(t)$  е составен од комплексниот сигнал  $y(t)$ , во кој се содржи корисниот сигнал  $s(t)$  и шумот  $n(t)$  кој потекнува од влезот во приемникот и кој стигнал до коректорот по минување низ приемниот филтер, и од еден втор, дополнителен шум  $v(t)$ . Овој шум има средна вредност нула и е статистички независен од  $y(t)$  и од  $n(t)$ . Значи примероците што доаѓаат на влезот од коректорот може да се претстават со следнава релација

$$z_k = y_k + v_k = s_k + n_k + v_k$$

Средната квадратна грешка на зголемениот сигнал  $z_k$  на излезот од филтерот гласи

$$E = \varepsilon^2 + \mathbf{C}^* \mathbf{W} \mathbf{C}$$

при што со  $\varepsilon^2$  е означена средна квадратна грешка за примерокот  $y_k$ ,  $\mathbf{C}$  е вектор во кој се содржат коефициентите на FSE коректорот, кои ги има  $N$ , а  $\mathbf{W}$  е квадратна матрица која потекнува од дополнителниот шум и чии елементи се дадени со

$$w_{km} = E\{v(nT - k\Delta) \cdot v^*(nT - m\Delta)\}$$

Според тоа, со тоа што се усвојува  $E$  како целна функција наместо  $\varepsilon^2$  исто се како да е додаден виртуален шум во приемниот сигнал, односно на неговиот примерок  $y_k$ . Ваквото тврдење станува очигледно ако се посматра најопштата целна функција дефинирана како

$$J = \varepsilon^2 + \mu \cdot \mathbf{C}^* \mathbf{Q} \mathbf{C}$$

каде  $\mathbf{C}$  е  $\mathbf{Q}$  произволна, позитивно дефинитна матрица, а  $\mu$  позитивен, мал број кој зависи од виртуалниот шум. Кога на вака дефинираната целна функција се примени градиентниот стохастички алгоритам (SG) се добиваат секогаш стабилни решенија за коефициентите на филтерот.

На база на вака дефинираната функција може да се изведат неколку алгоритми за адаптација на коефициентите:

- *Последователна обработка на коефициентите на филтерот* се добива кога за  $\mathbf{Q}$  се избере единична матрица. Така добиената целна функција гласи [1,2]

$$J_1 = \varepsilon^2 + \mu \cdot \mathbf{C}^* \mathbf{C}$$

- *Последователна обработка на виртуален шум* со која не се влошува средната квадратна грешка [4]. Услов за тоа е да важи релацијата

$$Y(jf)Y(f) = 0$$

каде е со  $Y(f)$  означена Fourierовата трансформација на комплексниот сигнал  $y(t)$ , а со  $V(f)$  спектарот на снага на виртуалниот шум  $v(t)$ . Оваа равенка покажува дека е потребно спектарот на виртуалниот шум да нема заеднички компоненти со спектрот на примениот сигнал.

На пример ако се претпостави дека спектарот на сигналот се наоѓа во опсегот  $|f| < (1+\xi)/2T$ ,  $\xi$  е фактор на заокружување на сигналот, шумот го исполнува претходното барање ако е спектрална густина на неговата средната снага дадена со изразот

$$V(f) = \begin{cases} 0 & |f| \leq (1 + \xi)/2T \\ 1 & (1 + \xi)/2T \leq |f| \leq 1/2\Delta \end{cases}$$

Во ваков случај елементите на позитивно дефинитната матрица  $Q$  лесно може да се определат, како што ќе биде покажано во поглавјето 3.

Недостаток на оваа решерније е доста сложената пресметка. Имено, адаптацијата на коефициентите на база на SG алгоритмот се изведува според релацијата

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{C}_k - \alpha [e_k \cdot \mathbf{y}_k + \mu \cdot \mathbf{Q}_0 \mathbf{C}_k]$$

каде е со  $\alpha$  означен чекорот на адаптација, а со  $e_k$  сигналот на грешка. Бидејќи е автокорелационата матрица на шумот  $Q_0$  густа, односно има голем број на членови кои се различни од нула, примената на овој алгоритам бара дополнителни  $N^2$  операции на множење.

### 3. Решение со дополнителен FIR филтер

Битна карактеристика на постапката со виртуален шум е нејзината сложена пресметка. Имено сложеноста на имплементацијата е одредена со бројот на ненулти елеменати во автокорелационата матрица. За да се смили бројот на операции на множење, се предлага виртуалниот шум да се пропушти низ дополнителен FIR филтер. Тој е проектиран под услов автокорелационата матрица на шумот на неговиот излез да има што повеќе членови еднакви на нула. Како што ќе биде набрзо покажано, сложеноста на пресметката може да се контролира со должината на овој FIR филтер. Така практично би била овозможена реализацијата на првобитната идеја со виртуален шум [4].

Нека е трансфер функцијата на FIR филтерот дадена со изразот

$$H_f(jf) = \sum_{k=0}^L d_k \cdot \exp(-j2\pi fk\Delta)$$

при што коефициентите  $\{d_k\}$  се реални, и нека е спектралната густина на виртуалниот шум  $V(f)$  еднаква на единица само во опсегот во кој не се наоѓа спектарот на дигиталниот сигнал, значи помеѓу  $(1+\xi)/2T < |f| < 1/2\Delta$ .

Спектарот на виртуалниот шум на излез од филтерот е даден со изразот

$$V_o(f) = V(f) \cdot |H_f(jf)|^2$$

Критериум кој се користи при проектирање на коефициентите е минимизација на снагата на шумот на излез од филтерот во фреквентниот опсег  $(1+\xi)/2T < |f| < 1/2\Delta$  во кој не се наоѓа спектарот на корисниот сигнал [5]:

$$\lambda = \min \left\{ \frac{\int_{(1+\xi)/2T}^{1/2\Delta} |H_f(jf)|^2 \cdot df}{\int_0^{1/2\Delta} |H_f(jf)|^2 \cdot df} \right\}$$

при што минимизацијата треба да се изведе со векторот  $D$  во кој се содржат коефициентите, кои ги има  $L+1$ ,

$$D' = [d_0, d_1, \dots, d_L]$$

По замена на изразот за трансвер функцијата на филтерот во изразот (10) и изведување на назначеното интегрирање коначно се добива следната равенка за својствените вредности на една квадратна  $F$  матрица

$$\lambda \cdot D'D = D'FD$$

Елементите на нововедената  $F$  матрица се добиваат по решавање на интегралот

$$f_{kl} = 2\Delta \cdot \int_{(1+\xi)/2T}^{1/2\Delta} \cos[2\pi(k-l)\Delta f] \cdot df = \delta_{kl} - \frac{\sin[\pi(1+\xi)(k-l)\Delta/T]}{\pi(k-l)}$$

при што со  $\delta_{kl}$  е означена Кронекеровата делта функција.

Равенката (11) покажува дека векторот со коефициенти  $D$  е ортонормален, како што се и својствените вектори  $v_i$  на една Хермитска матрица. Според тоа било кој својствен вектор на  $F$  матрицата ќе го исполни барањето формулирано со споменатата равенка. Меѓутога, минимизација на изразот (9) се постигнува само ако се определи овој својствен вектор кој одговара на минималната својствена вредност  $\lambda_{\min}$ . Ако овој својствен вектор се означи со  $v_{\min}$  тогаш коефициентите на филтерот се токму елементите на својствениот вектор,  $D = v_{\min}$ .

Ако се изведува аналогна имплементација виртуалниот шум се пропушта низ FIR филтерот, а потоа шумот на излезот од филтерот се собира со сигналот на влезот во фракциониот коректор. Ако се користи дигитална имплементација следниот чекор е да се одреди автокорелационата функција на шумот на излез од FIR филтерот. Таа е дадена со следниот израз

$$\Phi(\tau) = \sum_{m=0}^L \sum_{k=0}^L d_m d_k \cdot R_v[\tau + (m-k)\Delta]$$

каде е со  $R_v(\tau)$  означена автокорелационата функција на шумот  $v(t)$  на влезот во FIR филтерот. Кога е овој шум Гаусов процес со средна вредност нула и со единична снага оваа автокорелациона функција е делта импулс. Во тој случај, по наведеното множење, за автокорелационата функција на шумот на излез од филтерот во дискретни моменти на времето  $\tau = k\Delta$  се добива

$$\Phi(k\Delta) = \Phi_k = \sum_{m=0}^L d_m \cdot d_{k+m}$$

Последниот чекор е елементите на  $Q$  матрицата, која фигурира во равенката (3), да се определат според релацијата

$$q_{lj} = \Phi_{l-j} = \sum_{m=0}^L d_m \cdot d_{l-j+m}$$

Матрицата  $Q$  е Toeplitz-ова, со број на нулти елементи еднаков на  $N(N-2L-1)+L(L+1)$ . Според тоа и нивниот број зависи од должината  $L$  на FIR филтерот, при што важи и дополнително ограничување да е  $L < (N-1)/2$ , и од вкупниот број на коефициентите во трансверзалниот филтер  $N$ . Ако се усвои  $L=2$ , што одговара на поставеното ограничување кога е бројот на изводи во коректорот  $N < 5$ , за  $N$  еднакво на 5, 7 и 9 респективно се добива дека бројот на нулти елементи во  $Q$  матрицата изнесува 6, 20 и 42.

#### 4. Добиени резултати

Влијанието на предложениот алгоритам врз работата на фракционите коректори е илустрирано на примерот кога се врши пренос на дигитални сигнали со 16-QAM модулација. При тоа е претпоставено дека каналот за пренос е подложен на селективен фединг кој се јавува на фреквенцијата на носителот, достигнува длабочина од 26 dB, а потоа задржувајќи ја оваа длабочина се поместува кон краевите на опсегот во кој се наоѓа дигиталниот сигнал.

За оценка на работата на коректорот се користи неговата шумна широчина. Таа може да се определи според следната релација [6]

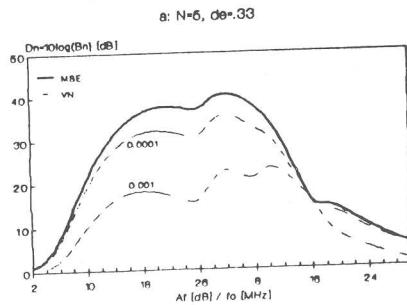
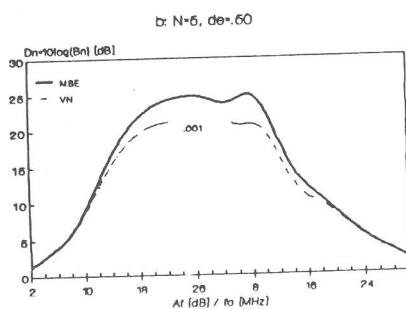
$$B_n = \sum_{k=-M}^{k=M} \sum_{l=-M}^{l=M} C_k^* C_l \rho_R[(k-l)\Delta] = C^* R_R C^*$$

при што со  $C$  е означен векторот во кој се содржат коефициентите на филтерот,  $N=2M+1$ , а со  $R_R = \{\rho_R[(k-l)\Delta]\}$  коваријансната квадратна матрица на приемниот филтер. Кога е трансфер функцијата на овој филтер еднаква на квадратен корен од Nyquist-овиот филтер, што е во овој случај претпоставено, тогаш автокорелационата функција на приемниот филтер е еднаква на импулсниот одзив на Nyquist-овиот филтер;  $r_R(\tau) = h_N(\tau)$ .

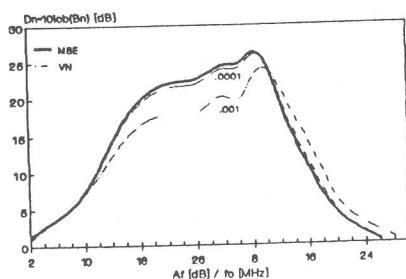
На сл.1 прикажано е влијанието на поедините алгоритми врз шумната широчина на филтрите кога ќе настапи фединг. Заради скратено пишување коректорите кај кои се користи вообичаениот MSE критериум за адаптација на коефициентите се означени со FSE, а со VN коректорите кај кои се користи алгоритмот предложен во овој труд. Параметар на овие слики претставува средната снага на виртуалниот шум  $\mu$ . Од сликите јасно се гледа дека модифицираниот VN алгоритам е делотворен само кога е  $\Delta/\tau/(1+\zeta)$ , какви се случаите со  $\Delta/\tau=0.33$  и  $\Delta/\tau=0.50$  за  $\zeta=0.5$ . Интересно е да се забележи дека значајна редукција на снагата на шумот може да се констатира и кај филтерот со  $N=7$  и  $\Delta/\tau=0.67$  но сепак перформансите на пренос со употреба на вообичаениот MSE критериум се најдобри. Одговор на ова може да се најде ако се определи промената на врвното изобличување при споменатиот фединг. Имено, примена на модифицираниот алгоритам има за резултат и одредено зголемување на врвното изобличување чие влијание на перформансите на пренос неможе да се компензираат со одредено смалавање на шумната широчина.

## 5. Литература

1. G.Ungerboeck: *Fractional tap-spacing equalizer and consequences for clock recovery in data modems*, COM-24, No.8, August 1976, pp.856-863.
2. R.D.Gitlin et all: *The tap-leakage algorithm: An algorithm for the stable operation of a digitally implemented, fractionally spaced adaptive equalizer*, BSTJ, Vol.61, October 1982, No.8, pp.1817-1839.
3. J.M.Cioffi: *Limited-precision effects in adaptive filtering*, IEEE Tran. on circuits and systems, Vol.CAS-34, No.7, July 1987, pp.821-833.
4. T.Uyematsu et all: *An optimization of the stable tap adjustment algorithm for the fractionally spaced equalizer*, ICC-88, pp.12.3.1-12.3.5
5. M.Bellanger: *Digital processing of signals*, John Wiley & Sons, 1989
6. Ј.Стрезов: Линеарни коректори за смалување на селективниот фединг кај дигиталните радиорелејни системи, дисертација, Скопје, 1992.



d: N=7, de=.50



c: N=7, de=.33

